

Za k -ti odbirak signala možemo napisati jednačinu:

$$s_k = \mathbf{h}_k^T \mathbf{x} \quad (1)$$

gde su:

\mathbf{h}_k – vektor koeficijenata za k -ti odbirak, dimenzije $n \times 1$,

\mathbf{x} – vector nepoznatih, dimenzije $n \times 1$.

Za prvih m odbiraka signala može se napisati matrična jednačina:

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

gde su:

\mathbf{s}_0 – vector prvih m odbiraka signala dimenzija $m \times 1$,

\mathbf{H}_0 – matrica koeficijenata (merjenja) dimenzija $m \times n$.

\mathbf{x}_0 – vektor nepoznatih sračunat iz prvih m odbiraka signala.

Koristeći LS metodu možemo sračunati vector nepoznatih kao:

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{s}_0 = \mathbf{H}_0^\# \mathbf{s}_0 \quad (3)$$

Kada pristigne najnoviji, $m+1$ odbirak, možemo napisati novu j -nu:

$$s_{m+1} = \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{x} \quad (4)$$

Dotadna jednačina može se napisati na kraju j -ne (2), čime se dobija preodređen sistem:

$$\mathbf{s} = \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (5)$$

gde je

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_{m+1} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{h}_{m+1}^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

Resenje prethodne j -ne po LS metodi daje:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{s} = \mathbf{H}^\# \mathbf{s} \quad (7)$$

Na osnovu j -ne (6) sledi:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_{m+1} \mathbf{h}_{m+1}^T \quad (8a, b)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{s} = \mathbf{H}_0^T \mathbf{s}_0 + \mathbf{h}_{m+1} s_{m+1}$$

Dalje, inverzija matrice koja se sastoji iz zbira jedinične matrice \mathbf{I} i matrice čiji je rang 1 ($\mathbf{d}\mathbf{e}^T$) je jednak jediničnoj matrici plus umnožak matrice čije je rang 1:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{d}\mathbf{e}^T)^{-1} = \mathbf{I} + c\mathbf{d}\mathbf{e}^T \quad (9)$$

Vrednost skalara c određuje se iz uslova da proizvod matrice i njene inverzije mora biti jedinična matrica:

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + \mathbf{d}\mathbf{e}^T][\mathbf{I} + c\mathbf{d}\mathbf{e}^T] &= \mathbf{I} + c\mathbf{d}\mathbf{e}^T + \mathbf{d}\mathbf{e}^T + \mathbf{d}\mathbf{e}^T c\mathbf{d}\mathbf{e}^T \\ &= \mathbf{I} + c\mathbf{d}\mathbf{e}^T + \mathbf{d}\mathbf{e}^T + c\mathbf{d}(\mathbf{e}^T \mathbf{d})\mathbf{e}^T \\ &= \mathbf{I} + [c(1 + \mathbf{e}^T \mathbf{d}) + 1]\mathbf{d}\mathbf{e}^T \end{aligned} \quad (10)$$

Odavde sledi:

$$c = -\frac{1}{1 + \mathbf{e}^T \mathbf{d}} \quad (11)$$

Identitet (9) je ključan za RLS algoritam. On pokazuje da se inverzija zbira jedinične matrice \mathbf{I} bilo koje matrice čiji je rang 1 može odrediti bez traženja inverzije matrice. Međutim, neophodno je da zaključak proširimo na bilo koju nesingularnu matricu, a ne samo na jediničnu (9). Zato ćemo j-nu (9) pomnožiti sa nesingularnom matricom \mathbf{B}^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{d}\mathbf{e}^T]^{-1} &= [(\mathbf{I} + \mathbf{d}\mathbf{e}^T)\mathbf{B}]^{-1} = [\mathbf{B} + \mathbf{d}\mathbf{e}^T\mathbf{B}]^{-1} \\ &= \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{I} + c\mathbf{d}\mathbf{e}^T] = \mathbf{B}^{-1} + c\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{e}^T \end{aligned} \quad (12)$$

Uvođenjem smene $\mathbf{f}^T = \mathbf{e}^T\mathbf{B}$, dobijamo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B} + \mathbf{d}\mathbf{f}^T]^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} + c\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{f}^T\mathbf{B}^{-1}, \\ c &= -\frac{1}{1 + \mathbf{f}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (13)$$

Uvodeći nove smene $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0$ i $\mathbf{d} = \mathbf{f} = \mathbf{h}_{m+1}$ u j-ni (13), dobijamo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T]^{-1} &= (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1} + c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}, \\ c &= -\frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}} \end{aligned} \quad (14)$$

J-ne (7), (8) i (14) koriste se za izvođenje RLS metode. Polazeći od j-na (7) i (8), dobijamo:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{s} = (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T)^{-1}(\mathbf{H}_0^T\mathbf{s}_0 + \mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}) \quad (15)$$

Smenom jednakosti (14) u j-nu (15), dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1} + c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}](\mathbf{H}_0^T\mathbf{s}_0 + \mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}) \\ &= (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{H}_0^T\mathbf{s}_0 + (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}\left(\frac{c}{c}\right) \\ &+ c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{H}_0^T\mathbf{s}_0 + c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}(\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1})s_{m+1} \\ &= \mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}c(-1 - \mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}) \\ &+ c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{H}_0^T\mathbf{s}_0 + (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}c\mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1} \\ &= \mathbf{x}_0 - (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}s_{m+1}c + c(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}\mathbf{h}_{m+1}^T\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0 + \left[\frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}} (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1} \right] (s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{k}(s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (16)$$

gde je:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T(\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1}} (\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{h}_{m+1} \quad (17)$$

Uvedeći smene: $\mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$ i $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1}$ i uvažavajući j-nu (14), RLS metoda se može napisati kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{k}(s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1} \\ \mathbf{P} &= [\mathbf{I} - \mathbf{k} \mathbf{h}_{m+1}^T] \mathbf{P}_0 \end{aligned} \quad (18a,b,c)$$

Iz j-ne (18a) može se primetiti da se korekcija vektora \mathbf{x} dobija množenjem signala greške $s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{x}_0$ pojačanjem \mathbf{k} . Pojačanje \mathbf{k} određuje se iz j-ne (18b). U narednim iteracijama, u j-ni (18b) koristi se vektor \mathbf{P} (umesto vektora \mathbf{P}_0) koji se dobija iz j-ne (18c).

RLS metoda može se iskazati i kroz dve j-ne. Ako se pojačanje \mathbf{k} unese u j-nu (18c), dobija se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I} - \mathbf{k} \mathbf{h}_{m+1}^T] \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0 - \frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1} \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 = \\ &= \frac{\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1} + \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1} \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} = \frac{\mathbf{P}_0}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \end{aligned} \quad (19)$$

Oдавde sledi novi izraz za pojačanje \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1} = \mathbf{P} \mathbf{h}_{m+1} \quad (20)$$

pa se RLS metoda može iskazati kroz j-ne:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \mathbf{h}_{m+1} (s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P} &= \frac{\mathbf{P}_0}{1 + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \end{aligned} \quad (21)$$

RLS metoda se dalje može unaprediti uvođenjem faktora zaboravljanja $\lambda < 1$, čime se smanjuje uticaj starijih odbiraka. Za $\lambda = 1$, svi odbirci imaju jednak uticaj na RLS metodu. Konačno, modifikovana RLS metoda dobija oblik:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \mathbf{h}_{m+1} (s_{m+1} - \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P} &= \frac{\mathbf{P}_0}{\lambda + \mathbf{h}_{m+1}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{h}_{m+1}} \end{aligned} \quad (22)$$

RLS metoda može se inicijalizovati tako što se za \mathbf{P}_0 usvoji proizvoljna dijagonalna matrica dimenzija $n \times n$, a za \mathbf{x}_0 pretpostave vrednosti koje su najbliže moguće tačnom rešenju. U j-ma (18), (21) ili (22) matrica \mathbf{H}_0 ne ulazi u proračun. Na taj način, uslov da je \mathbf{H}_0 nesingularna matrice ne mora se proveravati. Zato je RLS metoda robusnija od LS metode.